MINISTERUL EDUCAȚIEI

• Ion Cicu • Silvia Mareș • Ioana Iacob
• Răzvan Ceucă • Andrei Băleanu • David Brumar

MATEMATICĂ

clasa a VII-a

intuitext
grup SOFTWIN

Cuprins

UNITATEA 8 Competențe specifice: 1.6., 3.6., 4.6., 6.6.

Teorema lui Thales 146

UNITATEA 9 Competențe specifice: 1.6., 2.6., 3.6., 4.6., 5.6., 6.6.

Asemănarea triunghiurilor 160

UNITATEA 10 Competențe specifice: 1.7., 2.7., 3.7., 4.7., 5.7., 6.7.

Relații metrice în triunghiul dreptunghic 176

UNITATEA 11 Competențe specifice: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 1.6., 1.7., 2.1., 2.2., 2.3., 2.4., 2.5., 2.6., 2.7., 3.1., 3.2., 3.3., 3.4., 3.5., 3.6., 3.7., 4.1.,4.2., 4.3., 4.4., 4.5., 4.6., 4.7., 5.1., 5.2., 5.3., 5.4., 5.5., 5.6., 5.7., 6.1., 6.2., 6.3., 6.4., 6.5., 6.6., 6.7.

Bun venit vacanță! 200

UNITATEA 1

La revedere, vacanță!

Recapitulare

1 Scrie:

a) mulțimea numerelor întregi mai mari decât -5 și mai mici decât 2;

b) mulțimea numerelor întregi cu modulul mai mic sau egal cu 3;

c) mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1;

d) mulțimea numerelor întregi mai mari sau egale cu -2 și mai mici sau egale cu 4.

2 Împarte numărul 1 200 în cinci părți direct proporționale cu numerele 2, 3, 4, 5 și 6.

3 Numerele a, b și c sunt invers proporționale cu numerele 2, 3 și 4. Determină a, b și c pentru care relația $a^2 + b^2 + c^2 = 976$ este adevărată. Scrie toate soluțiile posibile.

4 Calculează:

a) $3 + (-2) - 5$;

b) $6 - (-2) \cdot (-3)$;

c) $5 : (-5) + (-5)$;

d) $(-2)^3 - (-2)^2$;

e) $|-3| + |2|$;

f) $|-5| - |-7|$;

g) $\left|(-2)^2\right| - \left|(-2)^3\right|$;

h) $||-4| - |+6||$;

i) $-1 + 3 \cdot \{-3 - 2 \cdot [-1 - (5 - 3)]\}^2$;

j) $\left[(-3 - 1)^2 + 3 \cdot (-4) + (-2)^3 + 3 \cdot (-1)^4\right]^3$.

5 Trei autobuze pornesc, din aceeași stație, în același moment. Cursele lor au durata de 30, 45, respectiv 50 de minute. După cât timp se vor întâlni din nou autobuzele în această stație?

6 Efectuează:

a) $1 - \frac{1}{2} : \left(1 - \frac{1}{2}\right) : \left[-\frac{1}{5} + (-4) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : (-2)\right)\right] + \frac{1}{13}$;

b) $2 - 0{,}3 : [1{,}2 - 0{,}(3) \cdot 2] \cdot \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot [1 - 0{,}0(5) \cdot 3]\right\}$.

7 Dintr-un depozit cu hrană uscată pentru animale s-a livrat, în prima lună, o cincime din cantitate. A doua lună, s-a livrat un sfert din rest și au rămas 3 360 kg de hrană uscată. Câte kilograme de hrană uscată au fost la început?

8 Se consideră unghiul AOB și semidreapta OC bisectoarea lui. Fie OE bisectoarea unghiului AOC și OF bisectoarea unghiului BOC. Demonstrează că OC este și bisectoarea unghiului EOF.

9 Suplementul complementului unui unghi are măsura de $123°$. Care este măsura unghiului?

10 Complementul suplementului unui unghi are măsura de $40°$. Care este măsura unghiului?

11 **Lucrați în pereche!** Completați spațiile punctate cu răspunsurile corecte, folosindu-vă de *Figura 1*, în care dreptele d și e sunt paralele, iar dreapta f este secantă.

a) Unghiurile $\widehat{1}$ și $\widehat{5}$ se numesc unghiuri .... .

b) Unghiurile $\widehat{1}$ și $\widehat{3}$ se numesc unghiuri .... .

c) Unghiurile $\widehat{2}$ și $\widehat{8}$ se numesc unghiuri .... .

d) Unghiurile $\widehat{3}$ și $\widehat{5}$ se numesc unghiuri .... .

e) Unghiurile $\widehat{4}$ și $\widehat{5}$ sunt unghiuri .... .

f) Unghiurile $\widehat{2}$ și $\widehat{7}$ sunt unghiuri .... .

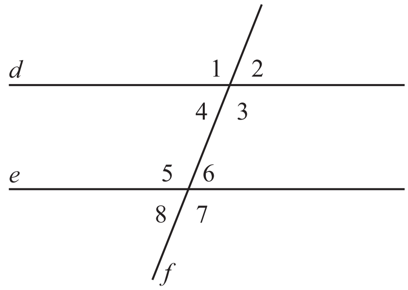


Figura 1

12 Se consideră $d \parallel e$, $f \parallel g$ și $d \perp f$. Demonstrează că $d \perp g$, $e \perp f$ și $e \perp g$.

13 Desenează cercurile $\mathcal{C}(A, 2\text{ cm})$ și $\mathcal{C}(B, 4\text{ cm})$. Precizează denumirea celor două cercuri precum și câte puncte comune au cele două cercuri în fiecare din următoarele cazuri:

a) $A = B$; b) $AB = 1$ cm; c) $AB = 2$ cm; d) $AB = 3$ cm;

e) $AB = 4$ cm; f) $AB = 5$ cm; g) $AB = 6$ cm; h) $AB = 7$ cm.

14 Un triunghi are un unghi cu măsura de $30°$. Dacă triunghiul are un unghi exterior cu măsura egală cu dublul unghiului adiacent cu el, calculează măsurile unghiurilor acestui triunghi.

15 În *Figura 2* este reprezentat triunghiul ABC, în care BD este bisectoarea unghiului ABC, $D \in AC$, BE este bisectoarea unghiului ABD, $E \in AC$, iar EM, $M \in BC$, este înălțime în triunghiul BEC. Dacă măsura unghiului DBC este de $30°$, iar măsura unghiului BAD este de $70°$, calculează măsurile unghiurilor triunghiului ABC, măsura unghiului BEA și măsura unghiului DNM, unde punctul N reprezintă intersecția segmentelor BD și EM.

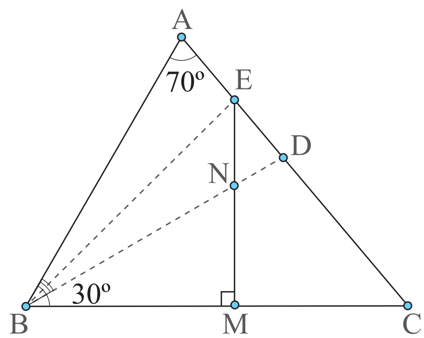


Figura 2

16 Se consideră triunghiurile LMN și XYZ și punctele G_1 și G_2, respectiv centrele lor de greutate. Dacă $\triangle LMG_1 \equiv \triangle XYG_2$, demonstrează că $\triangle LMN \equiv \triangle XYZ$.

17 În *Figura 3* este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu $AB \equiv AC$, în care bisectoarea unghiului B și înălțimea din A se intersectează în T. Dacă măsura unghiului ACT este egală cu $15°$, determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

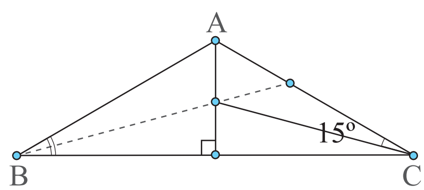


Figura 3

18 Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB \equiv AC$ și BD bisectoarea unghiului ABC, $D \in AC$. Dacă triunghiurile BCD și ABD sunt isoscele, determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

19 Se consideră triunghiul oarecare ABC și punctul D simetricul punctului B față de punctul A, iar punctul E simetricul punctului C față de punctul A. Demonstrează că $ED \parallel BC$.

Evaluare inițială

10p din oficiu

10p **1** Asociază fiecare operație din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	**B**
a) $(-6)+(-3)$	1) -9
b) $(-6)\cdot(-3)$	2) -3
c) $(-6):(-3)$	3) -2
d) $(-6)-(-3)$	4) $+2$
	5) $+18$

10p **2** Scrie în dreptul fiecărei afirmații **A**, dacă afirmația este adevărată și **F**, dacă este falsă:

a) Două cercuri secante au exact trei puncte distincte în comun.

b) Două cercuri tangente au exact un punct în comun, indiferent dacă sunt tangente interioare sau tangente exterioare.

10p **3** Completează spațiile punctate astfel încât să obții afirmații adevărate:

a) Suma măsurilor unghiurilor într-un triunghi este de .... .

b) Cel mai mare divizor comun al numerelor 120 și 144 este .... .

10p **4** Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$, atunci:

A) $AB = MP$; B) $AC = MN$; C) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle NMP$; D) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MNP$.

15p **5** Determină x din următoarea ecuație: $\frac{5}{4}\cdot\left[\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\right)+1\right]-\left(\frac{3}{2}\right)^2=3.$

15p **6** Se consideră două unghiuri adiacente suplementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$. Fie OX și OY bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$. Demonstrează că $OX \perp OY$.

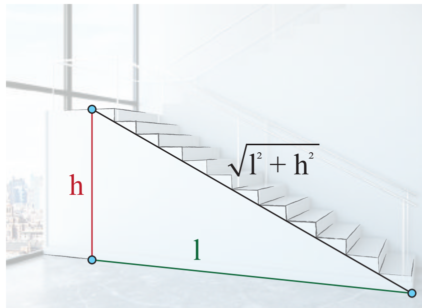
10p **7** Dacă trei numere naturale au suma egală cu 360 și sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5, află cele trei numere.

10p **8** Fie ABC un triunghi și $AM\,(M \in BC)$ mediană. Dacă $\sphericalangle BMA = 90^\circ$, demonstrează că triunghiul este isoscel.

UNITATEA 2

Mulțimea numerelor reale

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural



Rădăcina pătrată este utilă pentru inginerii constructori atunci când trebuie să calculeze diferite lungimi.

Amintește-ți!

1 Asociază, după model, fiecărui număr de pe prima linie numărul de pe linia a doua care este pătratul său.

4	7	11	13	24	105	123	
15 129	169	16	121	11 025	576	49	14

Model: Deoarece pătratul numărului 4 este 16, vom scrie $(4, 16)$.

Indiciu
Pătratul unui număr natural a este $a^2 = a \cdot a$.

2 Care dintre numerele următoare sunt pătratele unor numere naturale: 36, 81, 90, 144, 196, 312? Scrie aceste numere pe caiet.

Important

- Dacă pentru numărul natural x există un număr natural y astfel încât $y^2 = x$, atunci numărul y se numește **rădăcina pătrată a numărului** x.
- Notăm $\sqrt{x} = y$. Citim: *rădăcina pătrată a lui x este egală cu y sau radical din x este egal cu y*.
- Pentru a afla rădăcina pătrată a unui număr care este pătratul unui număr natural, scriem numărul ca putere cu exponentul 2, folosind descompunerea în factori primi, deoarece $\sqrt{a^2} = a$, dacă $a \geq 0$.

Exemple:

a) Deoarece $6^2 = 36$, 6 este rădăcina pătrată a lui 36.

b) Pentru a calcula $\sqrt{225}$, descompunem în factori pe 225.
$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} =$
$= \sqrt{(3 \cdot 5)^2} = \sqrt{15^2} = 15.$

Știai că... ?

Simbolul de radical are o poveste interesantă, fiind uneori notat simplu cu R (de la radix - rădăcină, în latină), sau l (de la latus - lungimea laturii unui pătrat), sau doar cu două sau mai multe puncte.

Simbolul de radical așa cum îl folosim astăzi, adică $\sqrt{}$, a fost introdus de René Descartes.

Figura 1: René Descartes

Observă și descoperă!

3 Copiază, pe caiet, *Tabelul 1* și *Tabelul 2* și completează căsuțele libere, după model:

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	$\sqrt{a\cdot b}$
4	9	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot3=6$	$\sqrt{4\cdot9}=\sqrt{36}=6$
25	4				
4	16				
36	4				

Tabelul 1

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}:\sqrt{b}$	$\sqrt{a:b}$
16	4	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{16}:\sqrt{4}=4:2=2$	$\sqrt{16:4}=\sqrt{4}=2$
36	9				
64	4				
100	25				

Tabelul 2

4 Compară rezultatele din ultimele două coloane, din fiecare dintre cele două tabele, și formulează o concluzie.

Important

Dacă a și b sunt pătratele a două numere naturale, atunci $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ și $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$, pentru $b\neq0$. A doua relație se mai poate scrie și sub forma $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Justificare:
Dacă $\sqrt{a}=x$ și $\sqrt{b}=y$, atunci $x^2=a$ și $y^2=b$. Avem că $x^2\cdot y^2=a\cdot b$ sau $(x\cdot y)^2=a\cdot b$ (1).
Dacă $\sqrt{a\cdot b}=z$, atunci $z^2=a\cdot b$ (2).
Din (1) și (2) obținem $(x\cdot y)^2=z^2$, de unde $x\cdot y=z$, adică $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$.

Exersează!

5 Urmărind pașii din justificarea pentru înmulțire, justifică afirmația: $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$.

6 Scrie în dreptul fiecărei afirmații litera **A**, dacă este adevărată sau litera **F**, dacă falsă.

a) Rădăcina pătrată a numărului 9 este 81.

b) Rădăcina pătrată a numărului 9 este 3.

c) Rădăcina pătrată a numărului 8^{100} este 4^{100}.

d) Rădăcina pătrată a numărului 8^6 este 8^3.

7 Scrie pe caiet numerele: $9, 16, 20, 100, 121, 200, 400$ și $1\,000$. Încercuiește-le pe acelea care sunt pătrate ale unor numere naturale.

8 Copiază pe caiet și unește, prin săgeți, fiecare căsuță de pe prima linie cu căsuța corespunzătoare din a doua linie, astfel încât cele două căsuțe să conțină valori egale.

$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{81}$	$\sqrt{121}$	$\sqrt{289}$	$\sqrt{324}$	$\sqrt{484}$

22	13	18	11	0	9	8	2	17	1

9 Calculează rădăcina pătrată a următoarelor numere, după model:

a) $16 \cdot 9$; b) $81 \cdot 625$; c) $5^4 \cdot 17^{10}$; d) $2\,020^2 \cdot 2^{2\,020}$; e) $22^2 \cdot 3^4 \cdot 2^6$; f) $5^6 \cdot 7^4 \cdot 10^8$.

Model: a) $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)^2} = 2^2 \cdot 3 = 12$.

10 Calculează următorii radicali:

a) $\sqrt{2\,025}$; b) $\sqrt{256}$; c) $\sqrt{1\,024}$;

d) $\sqrt{3^8}$; e) $\sqrt{5^8}$; f) $\sqrt{4^7}$;

g) $\sqrt{9^3}$; h) $\sqrt{6^6 \cdot 3^2}$; i) $\sqrt{12^4 \cdot 5^8}$.

Verifică rezultatele obținute cu ajutorul calculatorului, folosind un utilitar de calcul tabelar, de exemplu Excel (*Figura 2*).

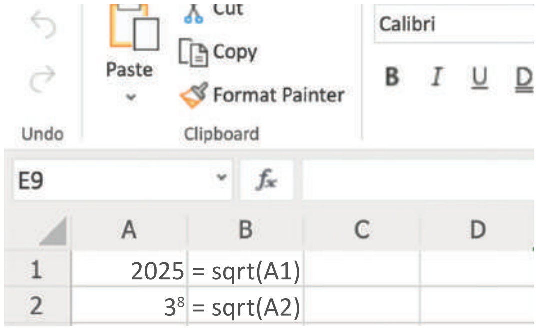


Figura 2: Foaie de lucru în Excel.

11 Calculează, folosind relația $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ sau relația $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; b) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; c) $\sqrt{1\,000} : \sqrt{10}$; d) $\sqrt{6^5} : \sqrt{6^3}$;

e) $\sqrt{64} : \sqrt{2^3} : \sqrt{2}$; f) $\sqrt{5^3} : \sqrt{5}$; g) $\sqrt{18} : \sqrt{2}$; h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$.

12 Compară numerele:

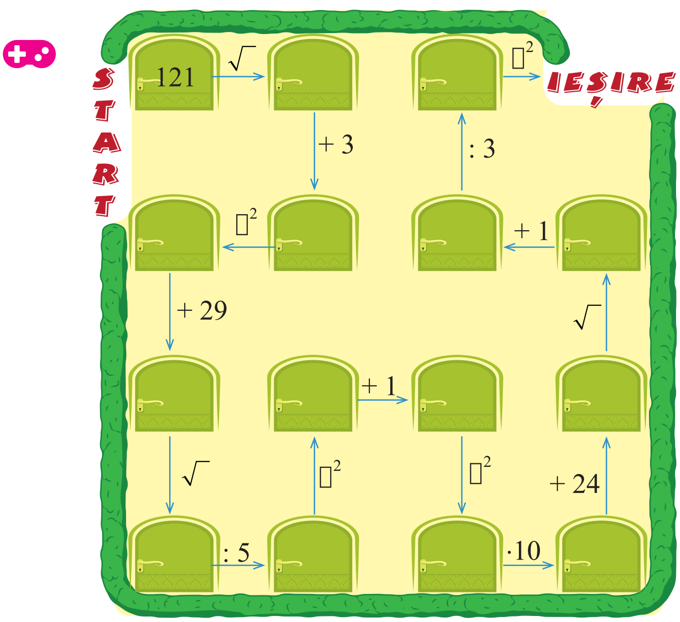
a) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ și $\sqrt{9 + 16}$; b) $\sqrt{64} + \sqrt{36}$ și $\sqrt{64 + 36}$;

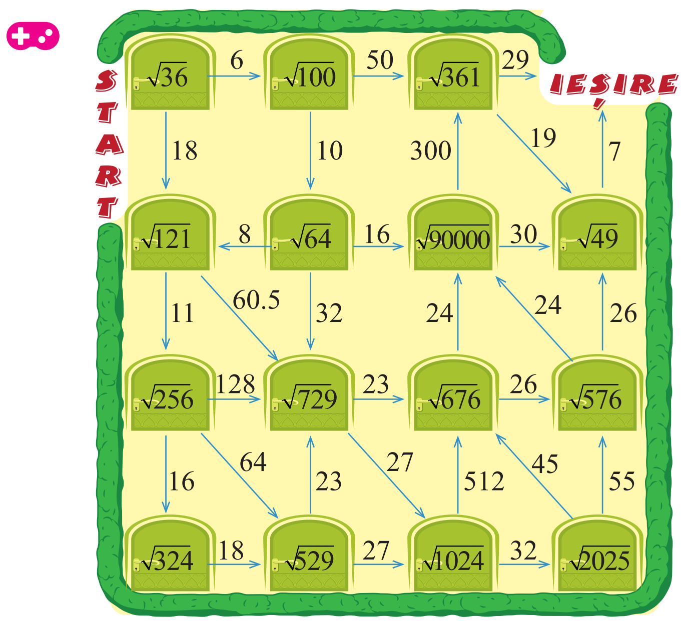
c) $\sqrt{25} + \sqrt{144}$ și $\sqrt{25 + 144}$; d) $\sqrt{0} + \sqrt{16}$ și $\sqrt{0 + 16}$.

13 Stabilește dacă relația $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$ este adevărată pentru orice numere naturale a și b. Oferă un exemplu de numere naturale a și b pentru care $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$.

14 a) Urmărește operațiile și sensul de deplasare, indicate de săgeți, pentru a calcula rezultatele fiecărei porți din labirint.

b) Trasează drumul către ieşirea din labirint, alegând săgețile pe care sunt scrise rezultatele corecte.





Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Un inginer își dorește să obțină o estimare a lungimii ipotenuzei triunghiului dreptunghic din *Figura 3*.

Inginerul calculează mai întâi $11{,}25^2 + 15^2$. Ce rezultat obține? Dacă ai calculat corect, vei obține, precum inginerul, valoarea 351,5625. Pentru a estima valoarea numărului $\sqrt{351{,}5625}$, inginerul observă că $324 < 351{,}5625 < 361$, de unde obține că $18 < \sqrt{351{,}5625} < 19$. Prin urmare, numărul $\sqrt{351{,}5625}$ este un număr cuprins între 18 și 19.

În anumite situații, transformarea fracțiilor zecimale finite în fracții ordinare poate conduce la determinarea exactă a radicalului.

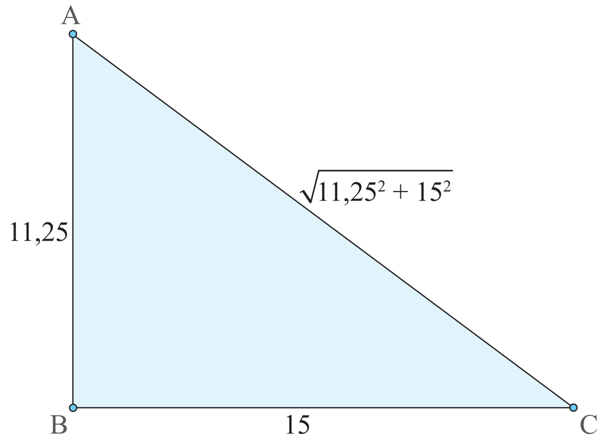


Figura 3

Amintește-ți!

1 Transformă următoarele fracții zecimale finite în fracții ordinare, urmărind, eventual, modelul alăturat.

a) 1,69; b) 2,25; c) 2,89;

d) 4,41; e) 0,0081; f) 0,0121.

Model: $0{,}57 = \dfrac{57}{100}$.

2 Scrie următoarele fracții sub forma $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$:

a) $\dfrac{169}{100}$; b) $\dfrac{25}{36}$; c) $\dfrac{9}{25}$; d) $\dfrac{121}{144}$;

e) $\dfrac{289}{100}$; f) $\dfrac{441}{100}$; g) $\dfrac{81}{10\,000}$; h) $\dfrac{9}{10\,000}$.

Model: $\dfrac{49}{100} = \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$.

Important

- Pentru anumite numere raționale $\dfrac{p}{q}$, există numere raționale $\dfrac{a}{b}$, astfel încât $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{p}{q}$.

Exemplu: Pentru $\dfrac{49}{100}$ există numărul rațional $\dfrac{7}{10}$, astfel încât $\left(\dfrac{7}{10}\right)^2 = \dfrac{49}{100}$.

- Există numere raționale care nu se pot scrie $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$, de exemplu $\dfrac{1}{2}$ sau numerele negative.
- Dacă pentru numărul rațional $\dfrac{p}{q} \geq 0$, există numărul rațional $\dfrac{a}{b} \geq 0$, astfel încât $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{p}{q}$, atunci putem scrie $\sqrt{\dfrac{p}{q}} = \dfrac{a}{b}$ și citim: **rădăcina pătrată a numărului** $\dfrac{p}{q}$ **este numărul** $\dfrac{a}{b}$ sau **radical din** $\dfrac{p}{q}$ **este egal cu** $\dfrac{a}{b}$.

- Dacă $\frac{m}{n} \geq 0$ este un număr rațional pentru care nu există două numere, a întreg și b natural nenul, astfel încât $\frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, atunci putem încadra numărul $\sqrt{\frac{m}{n}}$ între două numere naturale consecutive.

Exemple:

a) Pentru $\sqrt{3}$. Numărul 3 se află între pătratele consecutive a două numere naturale: 1, respectiv 4. Dacă $1 < 3 < 4$, atunci $1 < \sqrt{3} < 2$.

b) Pentru $\sqrt{\frac{9}{2}}$. Avem $\frac{9}{2} = 4{,}5$. Numărul 4,5 se află între pătratele consecutive a două numere naturale: 4, respectiv 9. Dacă $4 < \frac{9}{2} < 9$, atunci $2 < \sqrt{\frac{9}{2}} < 3$.

Exersează!

3 Asociază, după model, fiecare număr rațional de pe primul rând cu rădăcina pătrată a lui, de pe al doilea rând.

1. $\frac{4}{25}$ 2. $\frac{1}{10\,000}$ 3. $\frac{3^8}{5^2}$ 4. $\frac{7^{16}}{81}$

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{7^8}{9}$ c) $\frac{81}{5}$ d) $\frac{16}{625}$ e) $\frac{2}{5}$

Model: 1. $\rightarrow$ e) deoarece $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

Știai că... ?

Determinarea rădăcinii pătrate era cunoscută încă din antichitate.

4 Calculează:

a) $\sqrt{\frac{16}{49}}$; b) $\sqrt{\frac{1}{121}}$; c) $\sqrt{\frac{64}{169}}$; d) $\sqrt{\frac{100}{49}}$; e) $\sqrt{\frac{144}{361}}$;

f) $\sqrt{\frac{1}{400}}$; g) $\sqrt{\frac{225}{16}}$; h) $\sqrt{\frac{49}{900}}$; i) $\sqrt{\frac{1\,600}{81}}$; j) $\sqrt{\frac{9}{196}}$.

5 Încadrează între două numere naturale consecutive, după model, următoarele numere:

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{8}$; c) $\sqrt{23}$; d) $\sqrt{50}$;

e) $\sqrt{99}$; f) $\sqrt{173}$; g) $\sqrt{2{,}5}$; h) $\sqrt{16{,}25}$.

Model: $4 < 5 < 9$ implică $2 < \sqrt{5} < 3$.

6 Încadrează numerele date între două numere naturale consecutive:

a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt{111}$; c) $\sqrt{28}$; d) $\sqrt{32}$; e) $\sqrt{\frac{74}{5}}$;

f) $\sqrt{\frac{81}{2}}$; g) $\sqrt{405{,}23}$; h) $\sqrt{\frac{1}{325}}$; i) $\sqrt{\frac{85}{4}}$; j) $\sqrt{\frac{1\,234}{100}}$.